UNA TRASFORMAZIONE DI SERIE.

Nota del prof. **S. Pincherle**, a Bologna.

Adunanza del 9 dicembre 1888.

È noto che la trascendente

$$(1) \qquad \int_0^1 e^{-x}\, x^{z-1}\, dx,$$

considerata già dal de Gasparis, è stata rappresentata dal Prym con $P(z)$ e sviluppata in serie della forma

$$(2) \qquad P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(z+n)n!} + \ldots.$$

A questo sviluppo se ne può sostituire un altro.

Ricordando infatti la formola (Hermite, *Cours lithogr.*, p. 110)

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n\, dx = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

e ponendo

$$e^{-x} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n!}$$

viene, sostituendo nella (1):

$$(3) \qquad P(z) = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Non so se la trasformazione della serie (2) nella (3) sia già stata notata. Ad ogni modo, questa trasformazione è un caso particolare della seguente, che non mi sembra priva d'interesse.

Abbiasi la serie

$$(4) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n}$$

dove le a_n si suppongono tali che la serie

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

converga in un cerchio di raggio maggiore di 2. Si avrà

$$F(z) = \int_0^1 f(x) x^{z-1} dx$$

e quindi

$$F(z) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n x^{z-1} dx.$$

Applicando la formola ricordata ed integrando termine a termine si ottiene così per la $F(z)$ lo sviluppo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

che si può adoperare con frutto nello studio delle trascendenti analoghe alle funzioni euleriane.

Bologna, novembre 1888.

S. PINCHERLE